

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

P. NEGRINI

CAPACITA' E CRITERIO DI WIENER PER UNA CLASSE DI
OPERATORI ELLITTICI DEGENERI

28 GENNAIO 1988

In questo seminario esporremo alcuni risultati relativi al problema di Dirichlet per operatori ellittici degeneri della forma

$$(1) \quad L = \sum_{j=1}^v X_j^2 \quad \text{in } \Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^n$$

in cui $X_1 \dots X_v$ sono operatori del 1° ordine a coefficienti C^∞ . Facciamo le seguenti ipotesi:

1) L è *non totalmente degenera* in ogni punto di Ω_0 (ovvero, i coefficienti della parte principale di L non sono mai simultaneamente nulli, in alcun punto di Ω_0).

2) L'algebra di Lie generata da $X_1 \dots X_v$ ha rango n in ogni punto di Ω_0 .

3) Esistono $\theta, \theta^* \in C^2(\Omega_0, \mathbb{R})$ tali che $\theta, \theta^* > 0$ in Ω_0 , $L\theta < 0$, $L^*\theta^* < 0$ in Ω_0 , essendo L^* l'aggiunto formale di L . Questa ipotesi serve essenzialmente per avere il principio di minimo, indispensabile per poter studiare L con metodi di teoria del potenziale.

Uno strumento essenziale per lo studio di L è la distanza "riemanniana" legata a L , definita nel modo seguente:

sia $\gamma: [0, T] \rightarrow \Omega_0$ una curva regolare a tratti; γ si dice *X-ammissibile* se ciascun tratto C^1 di γ è curva integrale di uno dei campi $\pm X_1 \dots \pm X_v$. Si pone $\ell(\gamma) = T$; e, se $x, y \in \Omega_0$, $d(x, y) = \inf \ell(\gamma)$: γ è X-ammissibile e congiunge x e y .

La definizione e le proprietà di d sono state studiate da Fefferman e Phong e Nagel-Stein-Waniger [N-S-W]. La d genera in Ω_0 la stessa topologia della distanza euclidea, ma non è, in generale, equivalente a quest'ultima. Una proprietà di d , di fondamentale importanza per il nostro studio, è la PROPRIETÀ DI DUPLICAZIONE per la misura (di Lebesgue, indicata $|\cdot|$) delle d -sfere: ESISTE $C > 0$, INDIPENDENTE DA r , TALE CHE:

$$(2) \quad |S(x, 2r)| \leq C |S(x, r)|$$

(vedi [N-S-W]).

Sia Σ un aperto limitato, $\bar{\Sigma} \subseteq \Omega_0$, dotato di funzione di Green g per l'operatore L ; tramite la d si può dare una stima molto precisa di g :

$$(3) \quad g(x,y) \sim \frac{d^2(x,y)}{|S(x,d(x,y))|}$$

per tutti gli (x,y) di un intorno della diagonale di $\Sigma \times \Sigma$ (vedi [N-S-W] ; [S-C]).

Sfruttando la (3), io e Scornazzani [N-S] abbiamo dimostrato il CRITERIO DI WIENER, che caratterizza i punti regolari per il problema di Dirichlet per L . In questo seminario esporrò alcune varianti del criterio di Wiener, tra cui una presentazione dello stesso in forma integrale; tali fatti costituiscono l'oggetto del lavoro [N].

Diamo alcune definizioni. Sia F compatto, $F \subseteq \Sigma$, chiamiamo CAPACITA' di F il numero reale ≥ 0

$$(4) \quad \mathcal{C}(F) = \sup\{\mu(F) \mid \mu \in M^+(F) ; G\mu \leq 1 \text{ in } \Sigma\}$$

(più avanti, vedremo altre due definizioni equivalenti della "capacità").

Fissato $\lambda \in]0,1[$ definiamo, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$(5) \quad \Omega'_k = \{x \in \Omega' \mid \lambda^{k+1} \leq d(x,y) \leq \lambda^k\}$$

$$(6) \quad P'_k = \{x \in \Omega' \mid d(x,y) \leq \lambda^k\}$$

Infine, per $\rho > 0$, definiamo:

$$(7) \quad Q'_\rho = \{x \in \Omega' \mid d(x, y) \leq \rho\}$$

Teorema. (Criterio di Wiener). Sono equivalenti le affermazioni:

a) y è L-regolare per Ω

$$b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \mathcal{G}(\Omega'_k)}{|S(y, \lambda^k)|} = +\infty \quad \text{per un } \lambda \text{ (o per ogni } \lambda) \in]0, 1[$$

$$c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \mathcal{G}(P'_k)}{|S(y, \lambda^k)|} = +\infty \quad " \quad " \quad "$$

$$d) \int_0^1 \frac{\rho^2}{|S(y, \rho)|} \mathcal{G}(Q'_\rho) \frac{d\rho}{\rho} = +\infty$$

Dimostrazione. La equivalenza $a \Leftrightarrow b$ è contenuta in [N], ed è stata esposta nell'ambito di questi Seminari (7 marzo 1985); dimostriamo qui l'equivalenza tra le serie (b) e (c) e l'integrale (d).

Poiché $\Omega'_k \subseteq P'_k$, la (c) è maggiorante di (b); cerchiamo dunque una stima dei termini di (c) mediante quelli di (b).

Risulta $P'_k = P'_{k+1} \cup \Omega'_k$; perciò

$$\mathcal{G}(P'_k) \leq \mathcal{G}(P'_{k+1}) + \mathcal{G}(\Omega'_k) \text{ (sub-addittività di } \mathcal{G}) \text{ e quindi}$$

$$\mathcal{G}(\Omega'_k) \geq \mathcal{G}(P'_k) - \mathcal{G}(P'_{k+1}). \text{ Allora}$$

$$\sum_{k=0}^m \frac{\lambda^{2k} \mathcal{G}(\Omega'_k)}{|S(y, \lambda^k)|} \geq \sum_{k=0}^m \frac{\lambda^{2k}}{|S(y, \lambda^k)|} (\mathcal{G}(P'_k) - \mathcal{G}(P'_{k+1}))$$

Mediante una "sommazione per parti", quest'ultima somma diventa:

$$\frac{1}{|S(y,1)|} \mathcal{G}(P'_0) - \frac{\lambda^{2m}}{|S(y,\lambda^m)|} \mathcal{G}(P'_{m+1}) + \sum_{k=1}^m \mathcal{G}(P'_k) \left(\frac{\lambda^{2k}}{|S(y,\lambda^k)|} - \frac{\lambda^{2k-2}}{|S(y,\lambda^{k-1})|} \right)$$

*

Tenendo presente che $\mathcal{G}(S(y,r)) \sim \frac{|S(y,r)|}{r^2}$ (vedi [N-S]), il termine sotto-lineato (*) è limitato al variare di m ; per cui esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$\sum_{k=0}^m \frac{\lambda^{2k} \mathcal{G}(\Omega'_k)}{|S(y,\lambda^k)|} \geq C + \sum_{k=1}^m \mathcal{G}(P'_k) \frac{\lambda^{2k}}{|S(y,\lambda^k)|} \left(1 - \frac{|S(y,\lambda^k)|}{\lambda^2 |S(y,\lambda^{k-1})|} \right)$$

A questo punto, sfruttando una stima esplicita per la misura delle d-sfere di centro fissato, (vedi [N-S-W])

$$(8) \quad |S(y,r)| \sim \sum_{j=1}^q \ell_j r^{d_j}$$

in cui ℓ_j e d_j e q dipendono da y , ma non da r , si riesce a far vedere che la

quantità $1 - \frac{|S(y,\lambda^k)|}{\lambda^2 |S(y,\lambda^{k-1})|}$ si mantiene, al variare di k , maggiore di una costante

positiva indipendente da k ; da ciò segue la equivalenza tra le serie b) e c).

Per dimostrare l'equivalenza tra c) e d) confrontiamo anzitutto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n} \mathcal{G}(P'_n)}{|S(y,\lambda^n)|}$ di c) con l'integrale

$$(9) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{2t} \mathcal{G}(P'_t)}{|S(y,\lambda^t)|} dt.$$

Si può scrivere:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{2t} \mathcal{G}(P'_t)}{|S(y, \lambda^t)|} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{\lambda^{2t} \mathcal{G}(P'_t)}{|S(y, \lambda^t)|} dt.$$

Tenendo presente la proprietà di duplicazione per d , avremo che: esiste $C > 0$, indipendente da k , tale che, per ogni $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{\lambda^{2t} \mathcal{G}(P'_t)}{|S(y, \lambda^t)|} \leq \frac{\lambda^{2k} \mathcal{G}(P'_k)}{|S(y, \lambda^{k+1})|} \leq C \frac{\lambda^{2k} \mathcal{G}(P'_k)}{|S(y, \lambda^k)|}$$

ed inoltre, esiste C' tale che:

$$\frac{\lambda^{2t} \mathcal{G}(P'_t)}{|S(y, \lambda^t)|} \geq \frac{\lambda^{2k+2} \mathcal{G}(P'_{k+1})}{|S(y, \lambda^k)|} \geq C' \frac{\lambda^{2k+2} \mathcal{G}(P'_{k+1})}{|S(y, \lambda^{k+1})|}$$

Queste due disuguaglianze provano l'equivalenza tra la serie c) e l'integrale (9); d'altra parte, la sostituzione $\rho = \lambda^t$ muta l'integrale (9) nell'integrale d); ciò conclude la dimostrazione.

Una presentazione del criterio di Wiener in questa forma integrale è stata data, per una classe di operatori ellittici, da Littman-Stampacchia-Weinberger [L-S-W], e, per una diversa classe di operatori da Fabes-Jerison-Kenig [F-J-K].

2) DEFINIZIONI EQUIVALENTI DI "CAPACITÀ"

Abbiamo definito, nella formula (4) la "capacità" relativa ai nostri operatori L ; ripetiamo quella definizione, indicando ora con " \mathcal{G}_1 " la capacità:

$$(10) \quad \mathcal{G}_1(F) = \sup\{\mu(F) \mid \mu \in M^+(F); G\mu \leq 1 \text{ in } \Sigma\}.$$

Diamo ora altre due definizioni (\mathcal{G}_2 e \mathcal{G}_3) che dimostreremo essere e-

quivalente alla definizione di \mathcal{C}_1 .

Sia $\mu \in M^+(F)$, F compatto $\subseteq \Sigma$. Chiamiamo "energia totale di μ " il numero $I_\mu = \int_{\Sigma \times \Sigma} g(x, y) d\mu(x) d\mu(y)$; e poniamo:

$$(11) \quad \mathcal{C}_2(F) = \sup \left\{ \frac{1}{I_\mu} \mid \mu \in M^+(F) : \mu(F) = 1 \right\}$$

Una terza definizione di "capacità" richiede l'uso di un opportuno spazio funzionale che indicheremo H_A il quale, nel caso in cui L sia ellittico, coincide con $H_0^1(\Sigma)$.

Sia $A = (a_{ij})$ la matrice dei coefficienti della parte principale di L . Poniamo, per ogni $u \in C_0^\infty(\Sigma)$.

$$(12) \quad \|u\| = \left(\int_{\Sigma} (u^2(x) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_i u(x) \partial_j u(x)) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Poiché A è SEMI DEFINITA POSITIVA, $\|\cdot\|$ è una NORMA su $C_0^\infty(\Sigma)$; definiamo H_A il COMPLETAMENTO di $C_0^\infty(\Sigma)$ rispetto a tale norma. Si prova facilmente che

$$H_0^1(\Sigma) \quad H_A \quad L^2(\Sigma)$$

Inoltre, utilizzando una disuguaglianza del tipo di Poincaré, recentemente dimostrata da Jerison, si dimostra che una NORMA EQUIVALENTE su H_A è:

$$(13) \quad \|u\|_{H_A} = \left(\int_{\Sigma} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i u \partial_j u dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

(in effetti, per applicare la disuguaglianza di Jerison occorre che Σ sia contenuto in una d -sfera di raggio sufficientemente piccolo; questo non provoca alcuna difficoltà riguardo alle nostre applicazioni (criterio di Wiener, ecc.) in quanto il problema della regolarità dei punti è di carattere locale).

Definiamo per F compatto $\subseteq \Sigma$,

$$(14) \quad \mathcal{G}_3(F) = \inf\{|u|_{H_A}^2 \mid u \in C_0^\infty(\Sigma) ; u \geq 1 \text{ in } F\}$$

Dimostreremo che $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_3$ (per quanto riguarda \mathcal{G}_3 , occorre fare l'ipotesi supplementare di L autoaggiunto). Premettiamo alcune osservazioni:

- 1) ESISTE $\mu_1 \in M^+(F)$ tale che $G\mu_1 \leq 1$ su Σ , e $\mu_1(F) = \mathcal{G}_1(F)$; μ_1 è la *misura di equilibrio* di F , e $G\mu_1$ il *potenziale di equilibrio* di F
- 2) ESISTE $\mu_2 \in M^+(F)$ tale che $\mu_2(F) = 1$, e $\frac{1}{I\mu_2} = \mathcal{G}_2(F)$.
- 3) ESISTE $u_3 \in H_A$ tale che $u_3 = 1$ in F nel senso di H_A , e $|u_3|_{H_A}^2 = \mathcal{G}_3(F)$. Inoltre, se L è autoaggiunto, esiste $\mu_3 \in M^+(F)$ con supporto ∂F , tale che $Lu_3 = -\mu_3$ nel senso delle distribuzioni, e $\mu_3(F) = \mathcal{G}_3(F)$.

Ammessi i risultati 1), 2), 3), proviamo che $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_3$

$$1) \quad \mathcal{G}_1(F) \leq \mathcal{G}_2(F)$$

Se $\mathcal{G}_1(F) = 0$ non c'è nulla da provare. Supponiamo perciò $\mathcal{G}_1(F) > 0$, e sia

$$v_1 = \frac{1}{\mu_1(F)} \mu_1. \text{ Allora } v_1(F) = 1, \text{ e si ha:}$$

$$Iv_1 = \frac{1}{(\mu_1(F))^2} \int_{\Sigma} G\mu_1(x) d\mu_1 \leq \frac{1}{\mu_1(F)} = \frac{1}{\mathcal{G}_1(F)},$$

tenendo presente che $G\mu_1 \leq 1$ in Σ ; quindi $\mathcal{G}_1(F) \leq \frac{1}{Iv_1} \leq \mathcal{G}_2(F)$.

$$2) \quad \mathcal{G}_2(F) \leq \mathcal{G}_1(F)$$

Come in 1) possiamo supporre $\mathcal{G}_2(F) > 0$. Sia μ_2 tale che $\frac{1}{I\mu_2} = \mathcal{G}_2(F)$, e $\mu_2(F) = 1$.

SI DIMOSTRA che $G\mu_2(x) \leq I\mu_2$; ammesso ciò, poniamo $v_2 = \frac{\mu_2}{I\mu_2}$, avremo

$$Gv_2 \leq 1 \text{ in } \Sigma, \text{ quindi, } v_2(F) \leq \mathcal{G}_1(F); \text{ ma } v_2(F) = \frac{\mu_2(F)}{I\mu_2} = \frac{1}{I\mu_2} = \mathcal{G}_2(F); \text{ perciò,}$$

$$\mathcal{G}_2(F) \leq \mathcal{G}_1(F)$$

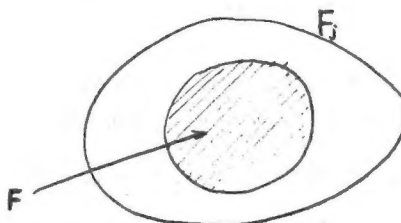
$$3) \quad \mathcal{G}_3(F) \leq \mathcal{G}_1(F).$$

Poiché $\mathcal{G}_3(F) = \mu_3(F)$, e $G\mu_3 = u_3 \leq 1$ in Σ , risulta $\mathcal{G}_3(F) = \mu_3(F) \leq \mathcal{G}_1(F)$.

$$4) \quad \mathcal{G}_1(F) \leq \mathcal{G}_3(F)$$

Siano F_j , $j \in \mathbb{N}$,
compatti tali che

$$F \cap \text{int } F_j \subseteq F_j \subseteq F_{j+1} \subseteq \Sigma;$$



siano μ_j e u_j le misure e i potenziali di equilibrio di F_j relativi a \mathcal{G}_3 (dunque, $u_j = G\mu_j$, e $Lu_j = -\mu_j$ in $\mathcal{D}'(\Sigma)$).

Essendo $\text{supp } \mu_j \subseteq \partial F_j$, le u_j sono ARMONICHE, quindi CONTINUE in $\text{int } F_j$, e perciò in F . Poiché è $u_j = 1$ in F_j "nel senso di H_A ", avremo ora (in senso puntuale) $u_j(x) = 1 \quad \forall x \in F, \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Allora, indicati con V_F e μ_F il potenziale e la misura di equilibrio di F relativi a \mathcal{G}_1 , sarà $u_j \geq V_F$, cioè $G\mu_j \geq G\mu_F$; da ciò segue $\mu_j(F_j) \geq \mu_F(F)$ ovvero $\mathcal{G}_3(F_j) \geq \mathcal{G}_1(F)$. Ma poiché risulta $\mathcal{G}_3(F) = \inf_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_3(F_j)$, dovrà essere anche $\mathcal{G}_3(F) \geq \mathcal{G}_1(F)$.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI CITATI

- [F-J-K] E. FABES, D. JERISON, C. KENIG: "The Wiener Test for Degenerate Elliptic Equations". Ann. Inst. Fourier 32 (1982), 151-182.
- [J] D. JERISON: "The Poincaré Inequality for Vector Fields satisfying Hörmander's Condition". Duke Math. J. 53 (1986).
- [L-S-W] W. LITTMAN, G. STAMPACCHIA, H. WEINBERGER: "Regular points for Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients". Ann. S.N.S. Pisa 17 (1963), 46-79.
- [N-S-W] A. NAGEL, E.M. STEIN, S. WAINGER: "Balls and Metrics Defined by Vector Fields. I: Basic Properties". Acta Math. 155 (1985), 103-147.
- [N] P. NEGRINI: "Some Remarks on Capacity and the Wiener Test for Degenerate Elliptic Operators". In corso di pubblicazione sul Bollettino U.M.I.
- [N-S] P. NEGRINI, V. SCORNAZZANI: "Wiener Criterion for a Class of Degenerate Elliptic Operators". Journal of Diff. Eq. 66 (1987), 151-164.

(Per una bibliografia più completa, si rimanda a [N]).